

Métaheuristiques Guidées par l'Apprentissage pour la Coloration de Graphe

Cyril GRELIER

12 Décembre 2023

Directeur Jin-Kao HAO

Rapporteur

Tristan CAZENAVE

Encadrant Olivier GOUDET

Rapporteur

Sébastien VEREL

Examineur

Nicolas DURAND

Examinatrice

Béatrice DUVAL

Invité

Daniel PORUMBEL

Problèmes Étudiés

État de l'Art

Réduction de Sommets

Bornes Supérieures sur le Score et le Nombre de Couleurs pour le **WVCP**

Arbre de Recherche de Monte Carlo - MCTS

- ... et Algorithmes Gloutons

- ... et Recherches Locales

- ... et Hyperheuristiques

Algorithmes Mémétiques - AHEAD

Conclusion & Perspectives

Problèmes Étudiés

GCP - Graph Coloring Problem

La Coloration de Graphe

Objectif : trouver une coloration légale minimisant le nombre de couleurs

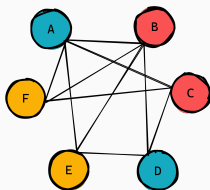
Score :

- Nombre de couleurs k (légale)
- Nombre de conflits $|C|$ (illégal)
- Nombre de sommets non colorés $|U|$ (partiellement légale)

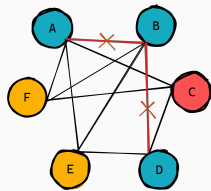
Problème NP-difficile

Applications :

- Gestion d'emplois du temps
- Affectation de fréquences
- Sudoku



✓ Coloration valide
à 3 couleurs



✗ Contraintes non respectées

GCP - Sudoku

1				9	2		7	4
9	2	4	1			5	3	
		3	5	6				2
6			4		7			8
		2		5		4	6	7
5			8		6		9	
		6		8		7		
	5	9			3			1
4			6	1		3		9

1	6	5	3	9	2	8	7	4
9	2	4	1	7	8	5	3	6
7	8	3	5	6	4	9	1	2
6	9	1	4	3	7	2	5	8
8	3	2	9	5	1	4	6	7
5	4	7	8	2	6	1	9	3
3	1	6	2	8	9	7	4	5
2	5	9	7	4	3	6	8	1
4	7	8	6	1	5	3	2	9

WVCP - Weighted Vertex Coloring Problem

La Coloration de Graphe Pondérée

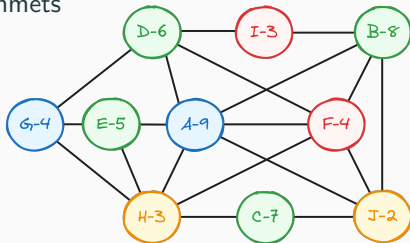
Objectif : trouver une coloration légale
minimisant la somme des poids des sommets
les plus lourds de chaque couleur

$$\text{Score} : \sum_{i=1}^k \max_{v \in V_i} w(v)$$

Problème NP-difficile

Applications :

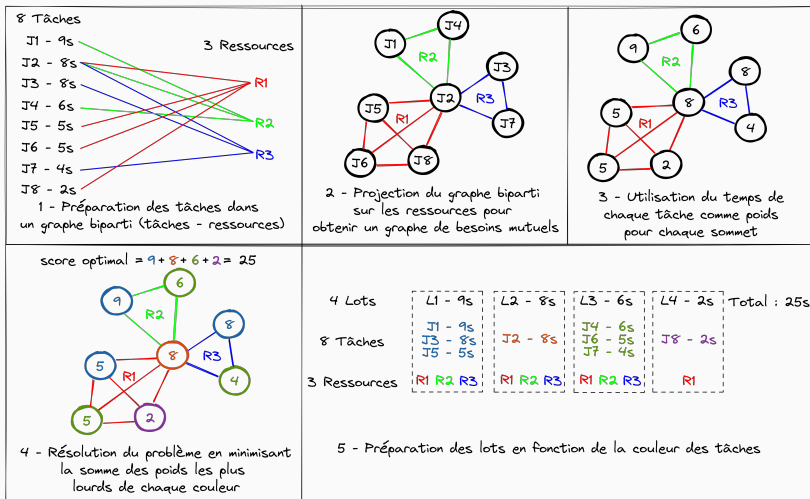
- Gestion de trafic dans des communications satellites
- Problème de décomposition de matrices
- Gestion de tâches par lot en parallèle



$$\text{Score} = 9 + 8 + 4 + 3 = 24$$

4	7	3	2
	6		
	5		

WVCP - Gestion de Tâches par Lots en Parallèle



État de l'Art

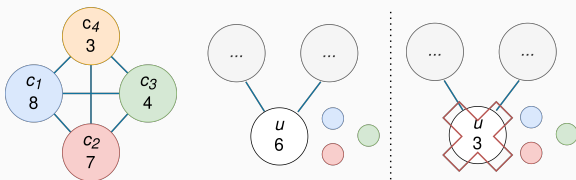
- Recherches locales :
 - **TabuCol** Hertz et Werra [1987] : illégal, one-move
 - **PartialCol** Blöchliger et Zufferey [2008] : partiellement-légal, grenade
 - **TabuEdges** [en cours] (Chap 8)
- Algorithmes mémétiques :
 - **HEA** Galinier et Hao [1999] : GPX, TabuCol
 - **Evo-Div** Porumbel *et al.* [2010] : croisement multi-parents, distances
 - **MACOL** Lü et Hao [2010] : croisement multi-parents, distances
 - **HEAD** Moalic et Gondran [2018] : 2 individus, GPX, TabuCol
 - **DLMCOL** Goudet *et al.* [2022] : +20 000, NN choix croisement
 - **AHEAD** Grelier *et al.*[soumis] (Chap 8)
 - **EvoWeight** Grelier *et al.*[en cours] (Chap 8)
- Apprentissage :
 - **PLSCOL** Zhou *et al.* [2018] : renforcement
 - **TensCol** Goudet *et al.* [2021] : descente de gradient, tenseurs
 - **NRPA** Cazenave *et al.* [2021] : séquences, descente de gradient
 - **MCTS + Glouton** (Chap 5)

- Apprentissage :
 - **MCTS + Recherche Locale** Grelier *et al.* [2022] (Chap 5,6)
 - **MCTS + Hyperheuristiques** Grelier *et al.* [2023] (Chap 7)
- Algorithmes mémétiques :
 - **DLMCOL** Goudet *et al.* [2022] : +20000, NN choix croisement
 - **AHEAD** Grelier *et al.*[soumis] (Chap 8)
- Recherches locales :
 - **AFISA** Sun *et al.* [2018] : illégal, one-move, coeff adaptatif
 - **RedLS** Wang *et al.* [2020] : illégal, poids arêtes, perturbations
 - **ILS-TS** Nogueira *et al.* [2021] : p-légal, 6 voisinages, perturbations
 - **TabuWeight** Grelier *et al.* [2022] (Chap 6)
- Méthodes exactes :
 - **2-Phase** Malaguti *et al.* [2009] : génération de colonnes, ILP
 - **MWSS** Cornaz *et al.* [2017] : MIP, ensemble indépendants
 - **CP** Goudet *et al.* [2023] : 3 modèles PPC (+ Chap 3,4)

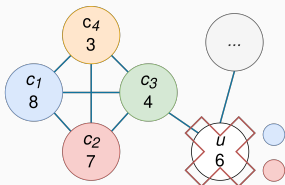
Réduction de Sommets

Réduction - Règle R0 et R1

- Règle de Réduction R0 Wang *et al.* [2020] :

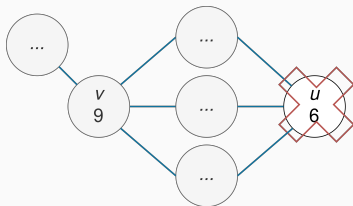


- Règle de Réduction R1, prend en compte les voisins de u dans C :



Réduction - Règle R2 et Procédure Itérative

- Règle de Réduction R2 adaptée de Cheeseman *et al.* [1991] (GCP) :



- Procédure de Réduction Itérative : demo¹
 1. Calcul d'une clique par sommet avec FastWClq de Cai et Lin [2016]
 2. Tri des sommets par ordre de poids puis degré
 3. Application de R1 et R2 sur chaque sommet
 4. Recommencer tant que des sommets sont supprimés
 5. Le graphe réduit est prêt !

1. <https://tinyurl.com/gc-reduction>

Réduction - En pratique

RI : nombre d'instances réduites

RV : nombre de sommets réduits

%*RV* : pourcentage de réduction

t(s) : temps moyen en secondes

GCP - /244	# <i>RI</i>	# <i>RV</i> avg	# <i>RV</i> max	% <i>RV</i> avg	% <i>RV</i> max	<i>t</i> (s) avg
R0	132	80.2	1199	26.3	87.7	16.3
R1	132	80.2	1199	26.3	87.7	16.3
R1+R2	146	115.4	1960	29.6	87.7	78.1
Iterative	146	182.5	4033	58.5	97.7	96.7

WVCP - /188	# <i>RI</i>	# <i>RV</i> avg	# <i>RV</i> max	% <i>RV</i> avg	% <i>RV</i> max	<i>t</i> (s) avg
R0	82	34.2	469	13.4	65	2.6
R1	84	39.5	574	14.7	66.4	3.8
R1+R2	85	41.7	596	15.4	69	4.1
Iterative	85	54.3	683	23.3	80.9	9.8

Fonctionne généralement mieux quand :

- Graphe peu dense
- Existence de grandes cliques (et lourdes pour le **WVCP**)
- Structure dans le graphe (graphes géométriques, graphes de type réseaux sociaux/livres/wap, ...)

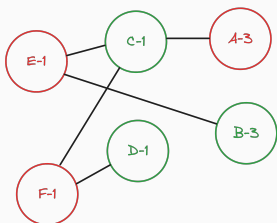
Autres points :

- 67 instances sur 244 du **GCP** ne gardent plus qu'une clique.
- Aide pour les méthodes de résolution exactes et approchées
- Aide pour le calcul des bornes

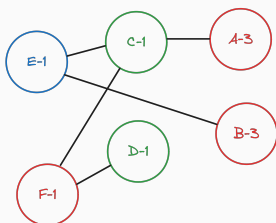
Bornes Supérieures sur le Score et le Nombre de Couleurs pour le WVCP

Pourquoi ?

- Pas de limite de nombre de couleurs
- Nécessaire pour les méthodes exactes
- Réduire l'espace de recherche



$$\text{Score} = \begin{matrix} 3 & + & 3 & = & 6 \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & 1 & & \end{matrix}$$



$$\text{Score} = \begin{matrix} 3 & + & 1 & + & 1 & = & 5 \\ 3 & & 1 & & & & \\ 1 & & & & & & \end{matrix}$$

Nombre de couleurs

- Borne inférieure : taille de la plus grande clique
- Borne supérieure : $k \leq \Delta(G) + 1$
Brooks [1941] GCP, Demange *et al.* [2007] WVCP

Score

- Borne inférieure : poids de la clique la plus lourde
- Borne supérieure : somme des poids des sommets, BKS²

2. Best Known Score - Meilleur Score Connu dans l'état de l'art

Nouvelles bornes - voir Théorème dans Goudet *et al.* [2023]

Soit une instance du WVCP $G = (V, E, w)$ et une solution optimale S^* possédant k groupes de couleurs. Alors les bornes supérieures sont :

- sur le nombre de couleurs :

$$k \leq \sum_{w \in W} \chi_{G_w}$$

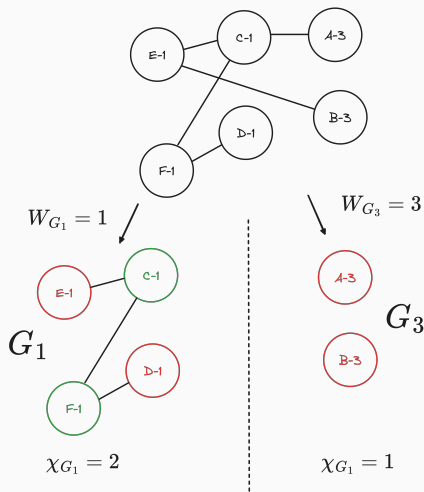
- sur le score :

$$f(S^*) \leq \sum_{w \in W} w \times \chi_{G_w}$$

avec :

- $W = \{w(v) \mid v \in V\}$ l'ensemble des valeurs de poids de G .
- $G_w = (V_w, E_w)$ le sous-graphe de G induit par le poids w .
- χ_{G_w} le nombre chromatique de G_w .

Bornes WVCP - Exemple



Borne supérieure sur le nombre de couleurs :

$$k \leq \sum_{w \in W} \chi_{G_w}$$

$$k \leq \chi_{G_1} + \chi_{G_3}$$

$$k \leq 2 + 1$$

$$k \leq 3$$

Borne supérieure sur le score :

$$f(S^*) \leq \sum_{w \in W} w \times \chi_{G_w}$$

$$f(S^*) \leq W_{G_1} \times \chi_{G_1} + W_{G_3} \times \chi_{G_3}$$

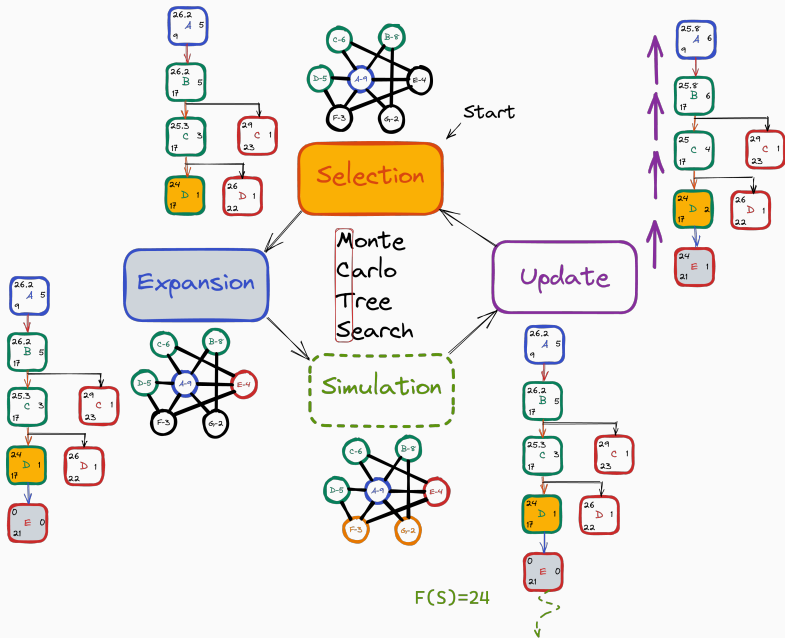
$$f(S^*) \leq 1 \times 2 + 3 \times 1$$

$$f(S^*) \leq 5$$

- 88/188 instances avec une meilleure borne supérieure sur le nombre de couleurs comparé à $\Delta(G) + 1$
 - ↪ En moyenne 13 couleurs de moins
- En pratique :
 - Meilleurs résultats avec un modèle PPC Goudet *et al.* [2023]
 - ↪ 95 optimalités prouvées contre 72 sans les bornes
 - Impact faible sur un MCTS

Arbre de Recherche de Monte Carlo - MCTS

MCTS - Arbre de Recherche de Monte Carlo



Particularités du WVCP

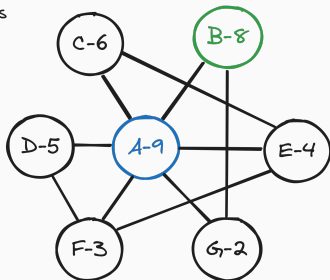
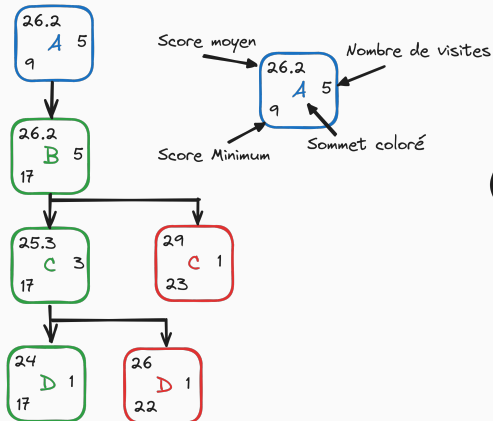
- Certains sommets sont plus importants (poids, degré)
- Seul le sommet le plus lourd d'une couleur a un impact sur le score

Pourquoi un MCTS ?

- Bien placer les sommets lourds
- Explorer de nouvelles zones de l'espace de recherche
- Couper les symétries et bien élaguer pour prouver l'optimalité
- Hybridation avec autres méthodes (Glouton, Recherches Locales, . . .)

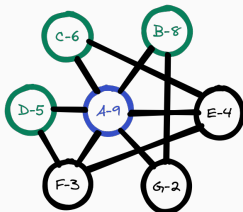
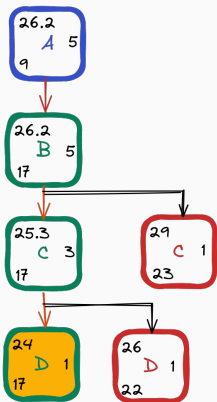
MCTS - Un Arbre et un Graphe

Arbre de Recherche



Graphe

MCTS - Phase 1 : La Sélection



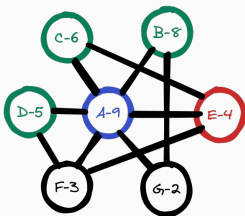
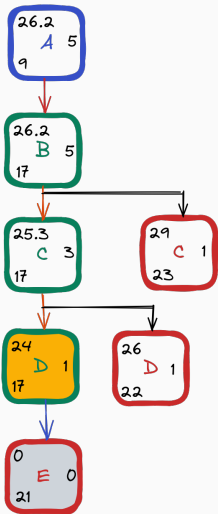
Selection

Choix avec score UCB (Jookeen et al. [2023])

Exploitation + coefficient * Exploration

$$\frac{\text{rank}(C_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^I \text{rank}(C_{t+1}^i)} + c \times \sqrt{\frac{2 \cdot \ln(\text{nb_visits}(C_t))}{\text{nb_visits}(C_{t+1}^i)}}$$

MCTS - Phase 2 : L'Expansion

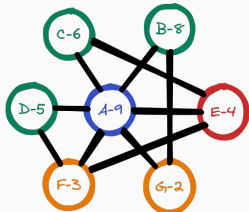
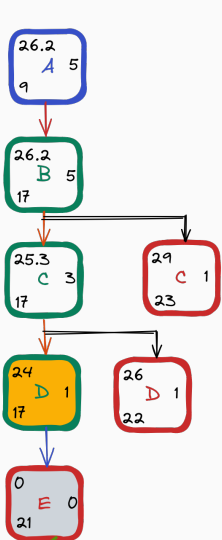


Expansion

Ouvrir un nouveau nœud :

- 1 - Utiliser une couleur déjà utilisée dans la branche
- 2 - Ouvrir une nouvelle couleur (limite bornes)

MCTS - Phase 3 : La Simulation



Simulation

Compléter la solution

0 - Choix purement aléatoire

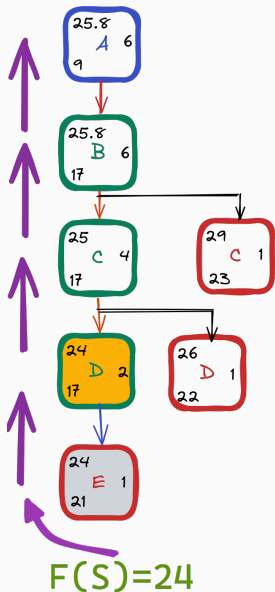
1 - Algorithme Glouton

2 - Recherche Locale

3 - Hyperheuristiques

$F(S)=24$

MCTS - Phase 4 : La Rétropropagation

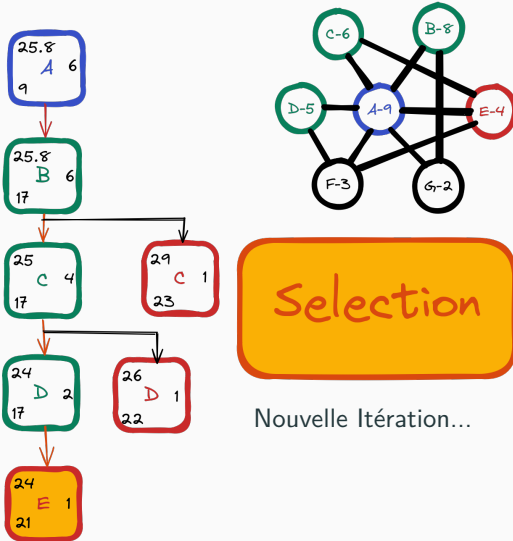


Update

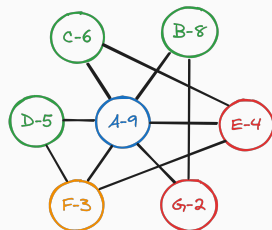
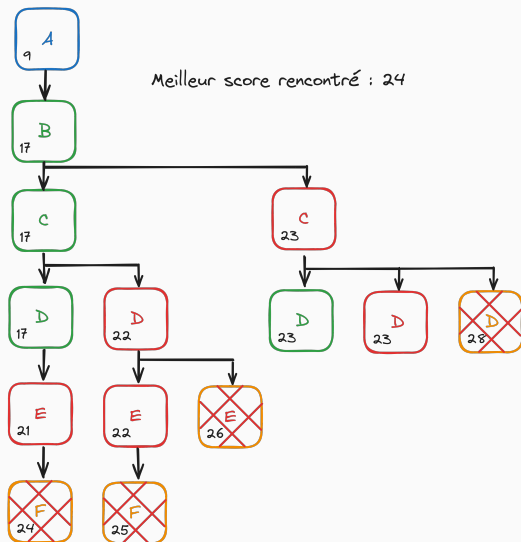
Mise à jour :

- Moyenne
- Nombre de visites

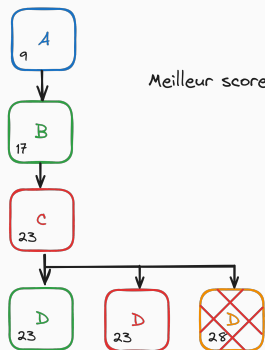
MCTS - Phase 1 : La Sélection...



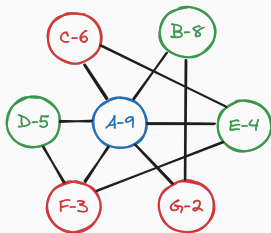
MCTS - Élagage 1



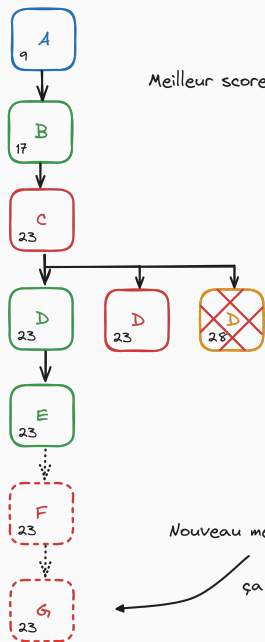
MCTS - Élagage 2



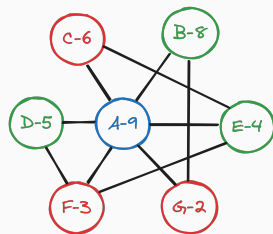
Meilleur score rencontré : 24



MCTS - Élagage 3



Meilleur score rencontré : 24



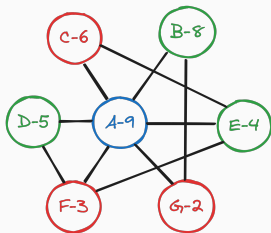
Nouveau meilleur score de 23 !

ça va couper...

MCTS - Élagage 4



Meilleur score rencontré : 23



Pourquoi l'utilisation de glouton pendant la simulation ?

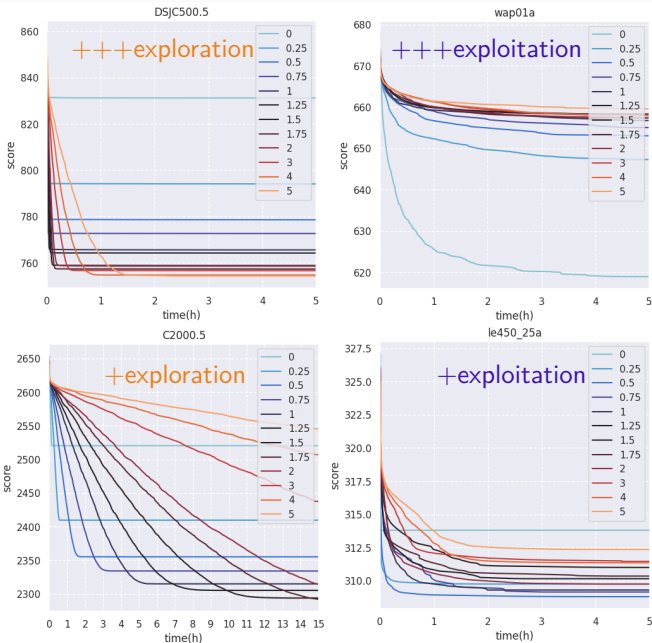
- Simulation aléatoire pas assez performante

Algorithmes Gloutons

- **R** :³ Aléatoire (choix aléatoire des couleurs + une nouvelle couleur)
- **C** :³ Contraint (choix aléatoire des couleurs)
- **D** :³ Déterministe (première couleur disponible)
- **DSatur** : Brélaz [1979] (choix du sommet le plus saturé)
- **RLF** : Leighton [1979] (construction de grandes stables)

3. Welsh et Powell [1967]

MCTS + Glouton - Coefficient Exploration VS Exploitation



Sur le GCP

- Face à NRPA (Cazenave *et al.* [2021]) :
 - NRPA atteint plus de meilleurs score
 - NRPA meilleur sur les instances géométriques ou avec patterns
 - MCTS obtient de meilleures moyennes
 - MCTS meilleur sur les instances aléatoires, plus denses/grandes
- Face à TabuCol (Hertz et Werra [1987]⁴) :
 - TabuCol reste meilleur de manière générale

Sur le WVCP

- Face à AFISA (Sun *et al.* [2018]) et RedLS (Wang *et al.* [2020]) :
 - MCTS meilleur sur les instances petites/moyennes
- Face à ILS-TS (Nogueira *et al.* [2021]) :
 - ILS-TS reste meilleur de manière générale

4. optimisé par Moalic et Gondran [2018]

Pour résumer

- MCTS prouve une 100aine d'optimalités sur le GCP et une 50aine pour le WVCP
- MCTS est très bon sur les petites instances et quelques moyennes
- Moins performant sur les plus grandes instances

Si après le glouton, on lançait une recherche locale ?

- Explorer le voisinage en améliorant la solution du glouton
- Améliorer les résultats sur les instances moyennes/grandes
- Chercher un bon point de départ pour la recherche locale

Pour résumer - GCP

- Recherche locale seule plus efficace
- Besoin en diversification différent

Pour résumer - WVCP

- Améliore les résultats de plusieurs recherches locales
- Résultats différents en fonction de l'instance et de la recherche locale

Pourquoi ?

- **Pas de meilleure recherche locale :**
 - Aucune ne domine les autres totalement
- **Adaptation :**
 - Choisir le bon opérateur sans connaissances a priori

Comment ?

- **Critère de Sélection :**
 - Entraînement d'un critère pour choisir les opérateurs
- **Récompense :**
 - Score de la solution après la recherche locale
- **Fenêtre glissante :**
 - Normalisation des scores des *ws* dernières itérations

Quel critère de sélection ?

- **Random** Choix aléatoire uniforme
- **Deleteur** Supprime les opérateurs o les moins performants
- **Roulette** Goëffon *et al.* [2016] Choix aléatoire pondéré par les récompenses (r)

$$proba[o] = p_{min} + (1 - |O| * p_{min}) * \frac{r[o]}{\sum r}$$

- **Pursuit** Goëffon *et al.* [2016] Sélection en faveur du meilleur opérateur (b)

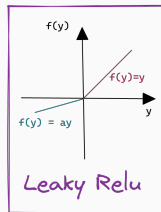
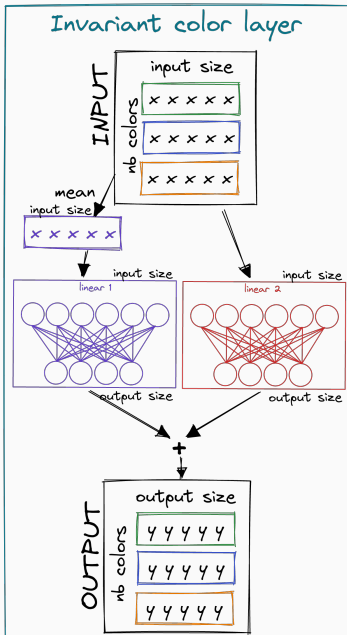
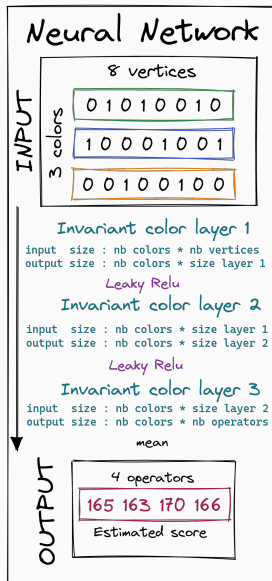
$$\begin{cases} proba[b] = proba[b] + \beta(p_{max} - proba[b]) \\ proba[o] = proba[o] + \beta(p_{min} - proba[o]) \end{cases}$$

- **UCB** : Préférer les meilleurs en encourageant l'exploration

$$score[o] = r[o] + c * \sqrt{2 * \frac{\log(\sum visits)}{visits[o]}}$$

- **NN** : Recommandation d'un réseau de neurones sur une solution brute avec des Deep Sets (Zaheer *et al.* [2017])

Réseau de Neurones - NN - Deep sets



Quels opérateurs de recherche locale ? - WVCP

- **AFISA** : Sun *et al.* [2018]
- **RedLS** : Wang *et al.* [2020]
- **ILS-TS** : Nogueira *et al.* [2021]
- **TabuWeight (TW)** : Grelier *et al.* [2022]

Fonctionnement :

1. Compléter la solution avec un glouton
2. Demander au critère quelle recherche locale utiliser
3. Lancer la recherche locale
4. Mettre à jour le critère avec le score obtenu

MCTS + Hyperheuristiques - Résultats WVCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/188	AFISA	MCTS+AFISA	TW	MCTS+TW	RedLS	MCTS+RedLS	ILS-TS	MCTS+ILS-TS	Random	Deleter	Roulette	UCB	Pursuit	NN	#BKS	#Best	#Best Avg
AFISA	-	35	49	17	53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	114	114	45
MCTS+AFISA	40	-	73	10	86	0	1	0	0	0	0	0	0	0	115	115	97
TW	40	40	-	25	48	1	0	3	2	2	2	2	1	2	99	99	53
MCTS+TW	74	73	78	-	101	5	1	0	0	0	0	0	0	0	132	132	98
RedLS	41	35	47	29	-	11	14	15	12	11	12	13	11	11	112	127	44
MCTS+RedLS	103	82	107	72	102	-	20	28	5	5	4	3	2	4	152	153	142
ILS-TS	104	82	106	75	96	19	-	18	10	11	10	9	11	11	159	164	159
MCTS+ILS-TS	102	82	103	73	92	15	2	-	0	1	0	1	1	1	155	155	152
Random	104	82	108	75	98	15	15	25	-	2	0	0	1	1	156	158	151
Deleter	104	82	108	75	99	14	17	23	5	-	0	0	0	1	156	161	156
Roulette	104	82	107	75	101	15	15	25	0	1	-	0	1	2	156	158	151
UCB	104	82	107	75	101	15	17	25	0	1	0	-	2	2	156	158	152
Pursuit	104	82	107	75	102	15	17	26	0	1	1	1	-	1	156	161	153
NN	104	82	107	75	101	15	18	26	4	1	0	1	0	-	157	160	153

Sélection des opérateurs de Recherche Locale

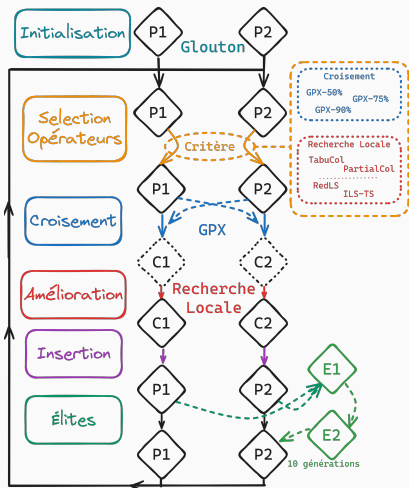
- Choix des critères ont du sens
- Généralement un ou deux bons opérateurs par instance
- Importance d'avoir des opérateurs complémentaires
- Pas d'alternances dans les choix d'opérateurs

Pour résumer

- MCTS rattrape ILS-TS sur une 15aine d'instances
- RedLS et ILS-TS restent meilleurs une 12aine d'instances où le MCTS n'intensifie pas assez

Algorithmes Mémétiques - AHEAD

AHEAD - Adaptive HEAD



Pourquoi ?

- On veut de l'intensification !

Comment ?

- **Algorithme mémétique :**
 - basé sur HEAD de Moalic et Gondran [2018]
- **Adaptatif :**
 - Critères de sélection pour s'adapter à l'instance
- **Croisement :**
 - GPX avec 3 niveau de conservation
- **Recherches Locales :**
 - 2 suffisamment différentes

Croisement

- **GPX-50%** : 1 couleur P1 pour 1 couleur P2
- **GPX-75%** : 3 couleur P1 pour 1 couleur P2
- **GPX-90%** : 9 couleur P1 pour 1 couleur P2

Recherche Locale - GCP

- **TabuCol** : Hertz et Werra [1987]
- **PartialCol** : Blöchliger et Zufferey [2008]
- **TabuEdges** : Grelier *et al.* [en cours]

Recherche Locale - WVCP

- **RedLS** : Wang *et al.* [2020]
- **ILS-TS** : Nogueira *et al.* [2021]

Critères

- Mêmes que pour le MCTS :
 - Random, Deleter, Roulette, Pursuit, UCB, NN
- Choix d'une paire d'opérateurs <croisement, recherche locale>
- Exception pour NN :
 - Génère tous les croisements puis sélectionne le plus prometteur

AHEAD - Résultats WVCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/48	MCTS+UCB	RedLS	ILS-TS	HEAD+RedLS	HEAD+ILS-TS	Random	Roulette	Deleter	UCB	Pursuit	NN	# BKS	# Best	# Best Avg
MCTS+UCB	-	25	15	3	20	0	0	0	0	0	0	20	19	15
RedLS	11	-	10	9	14	9	9	9	9	9	9	15	24	11
ILS-TS	10	27	-	8	19	3	6	5	4	1	3	23	25	21
HEAD+RedLS	16	26	15	-	25	1	1	0	0	1	0	19	19	11
HEAD+ILS-TS	5	20	6	5	-	0	0	0	0	0	0	18	19	13
Random	19	27	20	10	25	-	0	0	0	0	0	21	22	19
Roulette	17	26	20	9	26	0	-	0	0	0	0	22	22	17
Deleter	20	26	19	9	26	3	0	-	0	0	0	24	28	19
UCB	20	26	20	9	26	1	1	0	-	0	0	23	23	19
Pursuit	19	26	23	11	26	1	0	0	0	-	0	24	26	22
NN	20	27	21	10	27	0	1	0	0	0	-	21	23	19

AHEAD - Résultats GCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/31	PartialCol	TabuCol	HEAD+PC	HEAD+TC	Random	Roulette	Deleter	UCB	Pursuit	NN	# BKS	# Best	# Best Avg
PartialCol	-	2	3	2	1	2	1	2	2	2	5	8	11
TabuCol	14	-	11	2	2	1	0	2	0	1	8	14	7
HEAD+PC	8	6	-	1	0	0	1	0	0	0	6	10	7
HEAD+TC	18	12	20	-	4	2	1	2	2	2	7	17	15
Random	17	11	19	1	-	0	1	1	0	0	9	17	9
Roulette	17	11	19	1	0	-	0	0	0	0	11	19	12
Deleter	19	15	20	5	8	3	-	5	1	1	13	24	20
UCB	19	11	20	1	1	0	0	-	0	0	10	18	10
Pursuit	19	13	20	3	5	2	0	1	-	0	11	20	14
NN	19	12	20	2	4	0	0	0	0	-	12	23	16

À propos des Sélections

- Pas d'alternances dans les sélections
- Croisement GPX plus conservatifs généralement préférés mais sans très grandes différences

Pour résumer

- Recherches locales gardent quelques instances avec de meilleurs résultats
- Meilleurs résultats que les autres méthodes en général
- Deleter généralement bon avec de nouveaux meilleurs scores

Conclusion & Perspectives

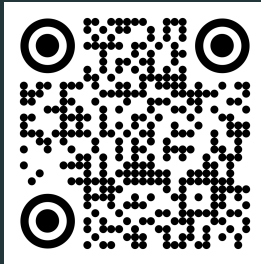
Conclusion & ☆ Perspectives

- Contributions théoriques
 - Réduction de sommets
 - ☆ Nouvelles règles
 - Bornes supérieures sur le nombre de couleur et score
- Méthodes implémentées
 - MCTS + Glouton
 - ☆ Adapter coefficient exploration vs exploitation pendant la recherche
 - ☆ DSatur lors de la construction de l'arbre
 - ☆ BeamSearch
 - MCTS + Recherche Locale
 - MCTS + Hyperheuristiques
 - ☆ Recherche Locale non systématique
 - DLMLCOL
 - AHEAD
 - Modèles de programmation par contraintes
 - ☆ EvoWeight
 - ☆ LNS

Merci pour votre attention !

Questions ?

Code source, tableaux de résultats, articles :



<https://cyril-grelier.github.io/>

Références

Ivo Blöchliger and Nicolas Zufferey. A graph coloring heuristic using partial solutions and a reactive tabu scheme. *Computers & Operations Research*, 35(3) :960–975, 2008.

Daniel Brélaz. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4) :251–256, 1979.

Rowland Leonard Brooks. On colouring the nodes of a network. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 37, pages 194–197. Cambridge University Press, 1941.

Shaowei Cai and Jinkun Lin. Fast solving maximum weight clique problem in massive graphs. In *IJCAI*, pages 568–574, 2016.

- Tristan Cazenave, Benjamin Negrevergne, and Florian Sikora. Monte carlo graph coloring. In *Monte Carlo Search : First Workshop, MCS 2020, Held in Conjunction with IJCAI 2020, Virtual Event, January 7, 2021, Proceedings 1*, pages 100–115. Springer, 2021.
- Peter C Cheeseman, Bob Kanefsky, William M Taylor, et al. Where the really hard problems are. In *IJCAI*, volume 91, pages 331–337, 1991.
- Denis Cornaz, Fabio Furini, and Enrico Malaguti. Solving vertex coloring problems as maximum weight stable set problems. *Discrete Applied Mathematics*, 217 :151–162, 2017.
- Marc Demange, D de Werra, Jérôme Monnot, and V Th Paschos. Time slot scheduling of compatible jobs. *Journal of Scheduling*, 10(2) :111–127, 2007.

- Philippe Galinier and Jin-Kao Hao. Hybrid evolutionary algorithms for graph coloring. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3 :379–397, 1999.
- Adrien Goëffon, Frédéric Lardeux, and Frédéric Saubion. Simulating non-stationary operators in search algorithms. *Applied Soft Computing*, 38 :257–268, 2016.
- Olivier Goudet, Béatrice Duval, and Jin-Kao Hao. Population-based gradient descent weight learning for graph coloring problems. *Knowledge-Based Systems*, 212 :106581, 2021.
- Olivier Goudet, Cyril Grelier, and Jin-Kao Hao. A deep learning guided memetic framework for graph coloring problems. *Knowledge-Based Systems*, 258 :109986, 2022.

Olivier Goudet, Cyril Grelier, and David Lesaint. New bounds and constraint programming models for the weighted vertex coloring problem. *Proceedings of the Thirty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 2023, 19th-25th August 2023, Macao, SAR, China*, pages 1927–1934, 2023.

Cyril Grelier, Olivier Goudet, and Jin-Kao Hao. On monte carlo tree search for weighted vertex coloring. In *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization : 22nd European Conference, EvoCOP 2022, Held as Part of EvoStar 2022, Madrid, Spain, April 20–22, 2022, Proceedings*, pages 1–16. Springer, 2022.

Cyril Grelier, Olivier Goudet, and Jin-Kao Hao. Monte carlo tree search with adaptive simulation : A case study on weighted vertex coloring. In *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization : 23rd European Conference, EvoCOP 2023, Held as Part of EvoStar 2023, Brno, Czech Republic, April 12–14, 2023, Proceedings*, pages 98–113. Springer, 2023.

Alain Hertz and D de Werra. Using tabu search techniques for graph coloring. *Computing*, 39(4) :345–351, 1987.

Jorik Jooken, Pieter Leyman, Tony Wauters, and Patrick De Causmaecker. Exploring search space trees using an adapted version of monte carlo tree search for combinatorial optimization problems. *Computers & Operations Research*, 150 :106070, 2023.

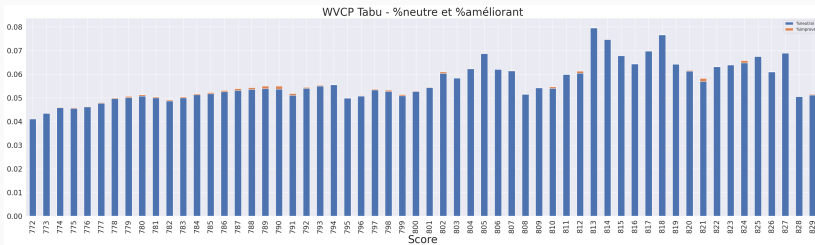
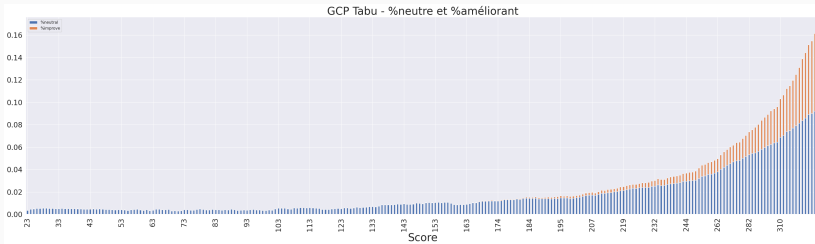
- Frank Thomson Leighton. A graph coloring algorithm for large scheduling problems. *Journal of research of the national bureau of standards*, 84(6) :489, 1979.
- Zhipeng Lü and Jin-Kao Hao. A memetic algorithm for graph coloring. *European Journal of Operational Research*, 203(1) :241–250, 2010.
- Enrico Malaguti, Michele Monaci, and Paolo Toth. Models and heuristic algorithms for a weighted vertex coloring problem. *Journal of Heuristics*, 15 :503–526, 2009.
- Laurent Moalic and Alexandre Gondran. Variations on memetic algorithms for graph coloring problems. *Journal of Heuristics*, 24 :1–24, 2018.
- Bruno Nogueira, Eduardo Tavares, and Paulo Maciel. Iterated local search with tabu search for the weighted vertex coloring problem. *Computers & Operations Research*, 125 :105087, 2021.

- Daniel Cosmin Porumbel, Jin-Kao Hao, and Pascale Kuntz. A search space “cartography” for guiding graph coloring heuristics. *Computers & Operations Research*, 37(4) :769–778, 2010.
- Wen Sun, Jin-Kao Hao, Xiangjing Lai, and Qinghua Wu. Adaptive feasible and infeasible tabu search for weighted vertex coloring. *Information Sciences*, 466 :203–219, 2018.
- Yiyuan Wang, Shaowei Cai, Shiwei Pan, Ximing Li, and Monghao Yin. Reduction and local search for weighted graph coloring problem. In *Proceedings of the AAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 34, pages 2433–2441, 2020.
- Dominic JA Welsh and Martin B Powell. An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *The Computer Journal*, 10(1) :85–86, 1967.

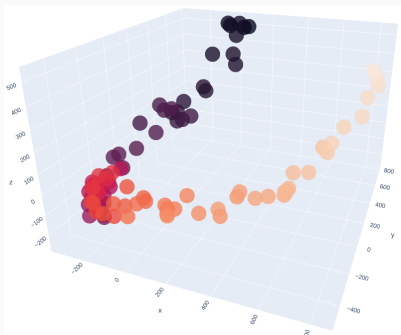
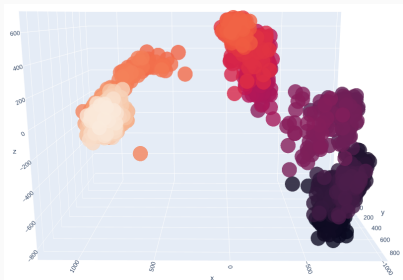
- Manzil Zaheer, Satwik Kottur, Siamak Ravanbakhsh, Barnabas Poczos, Russ R Salakhutdinov, and Alexander J Smola. Deep sets. *Advances in neural information processing systems*, 30, 2017.
- Yangming Zhou, Béatrice Duval, and Jin-Kao Hao. Improving probability learning based local search for graph coloring. *Applied Soft Computing*, 65 :542–553, 2018.

Introduction

WVCP - GCP - Voisinage



WVCP - GCP - Exploration



https://cyril-grelier.github.io/assets/html/search_path_wvcp.html

https://cyril-grelier.github.io/assets/html/search_path_gcp.html

Réduction

Réduction - Résultats **WVCP**

instance	V	density	R0	R1	R1+R2	Iterated	time(s)
DSJC125.1g	125	0.1	0	0	0	0	0
DSJC125.5g	125	0.5	0	0	0	0	0
DSJC125.9g	125	0.9	0	0	0	0	3
DSJR500.1	500	0.0	78	80	80	256	1
GEOM110	110	0.1	6	9	9	23	0
inithx.i.1	864	0.1	469	574	596	683	19
le450_15a	450	0.1	28	28	28	30	1
le450_25b	450	0.1	90	90	90	105	2
multsol.i.5	186	0.2	28	53	75	82	1
queen10_10	100	0.6	0	0	0	0	0
p42	138	0.1	1	1	1	3	0
r30	301	0.1	0	0	0	0	0
wap02a	2464	0.0	161	165	165	249	168
wap04a	5231	0.0	244	244	244	321	527

Réduction - Résultats GCP

instance	V	density	R0	R1	R1+R2	Iterated	time(s)
DSJC125.1	125	0.1	0	0	0	0	0
DSJC125.5	125	0.5	0	0	0	0	0
DSJC125.9	125	0.9	0	0	0	0	1
DSJR500.1	500	0.1	150	150	151	488	0
GEOM110	110	0.1	17	17	17	101	0
inithx.i.1	864	0.1	705	705	709	769	4
le450_15a	450	0.1	41	41	41	43	0
le450_25b	450	0.1	131	131	131	156	0
multsol.i.5	186	0.2	106	106	108	114	0
queen10_10	100	0.3	0	0	0	0	0
p42	138	0.1	10	10	10	124	0
r30	301	0.1	0	0	0	0	0
r1000.1	1000	0.1	99	99	99	954	0
wap04a	5231	0.0	1199	1199	1199	1199	26

Bornes

Bornes **WVCP** - Résultats

Instance	$ V' $	densité	h_W	$\Delta + 1$	bornes couleurs		bornes score	
					lb	ub	lb	ub
DSJC125.1g	125	0.1	0.04	24	4	14	19	42
DSJC125.5g	125	0.5	0.04	76	10	34	42	105
DSJC125.9g	125	0.9	0.04	121	32	72	124	220
DSJR500.1	244	0.03	0.08	26	12	26	166	477
GEOM110	87	0.11	0.11	20	9	20	65	151
inithx.i.1	181	0.05	0.1	169	54	78	569	800
le450_15a	420	0.08	0.05	99	15	61	206	628
le450_25b	345	0.08	0.06	108	25	73	307	735
multsol.i.5	104	0.23	0.18	88	31	58	367	574
queen10_10	100	0.59	0.19	36	10	36	153	420
p42	135	0.12	0.46	25	14	25	2466	8108
r30	301	0.09	0.76	35	19	35	9816	104285

Bornes **WVCP** - Impact sur le Modèle Primal

instance	BKS	primal		primal ub color		primal all bounds	
		score	time(s)	score	time(s)	score	time(s)
DSJC125.1g	23	<u>23*</u>	862	<u>23*</u>	435	<u>23*</u>	451
DSJC125.5g	71	78	tl	78	tl	78	tl
DSJC125.9g	169*	176	tl	176	tl	176	tl
DSJR500.1	169	187	tl	177	tl	169	tl
GEOM110	68*	69	tl	68*	1893	68*	1729
inithx.i.1	569*	569	tl	569	tl	569*	54
le450_15a	212	245	tl	234	tl	234	tl
le450_25b	307	307	tl	307	tl	<u>307*</u>	322
multsol.i.5	367*	367	tl	367	tl	367*	31
queen10_10	162	170	tl	169	tl	169	tl
p42	2466*	2480	tl	2466	tl	2466*	2908
r30	9816*	9831	tl	9831	tl	9831	tl
#BKS		101/188		105/188		107/188	
#Optimal		72/188		75/188		95/188	

MCTS

MCTS + Glouton - Résultats GCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/244 instances	MCTS+R	MCTS+C	MCTS+D	MCTS+DSatur	MCTS+RLF	NRPA	TabuCol	#BKS	#Best	#Best Avg	#Optimal
MCTS+R	-	0	2	0	1	43	9	172	172	151	109
MCTS+C	80	-	20	10	2	45	10	180	181	178	109
MCTS+D	78	24	-	10	0	48	9	178	178	179	110
MCTS+DSatur	81	46	46	-	10	55	12	189	189	189	109
MCTS+RLF	80	55	60	34	-	63	10	190	191	192	110
NRPA	78	53	59	40	28	-	11	202	206	159	0
TabuCol	78	60	64	50	52	46	-	213	235	229	0

NRPA : Cazenave *et al.* [2021] - TabuCol : Hertz et Werra [1987]

MCTS + Glouton - Résultats GCP

instance	BKS	DSatur		MCTS+DSatur			RLF		MCTS+RLF		NRPA			TabuCol		
		best	time	best	mean	time	best	time	best	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	145	214	0	210	210.7	3569	195	163	192	2482	211	213.1	2596	162	163.2	1802
C2000.9	408	581	1	565		265	511	343	511	322	587	628.5	3185	412	413	2758
C4000.5	259	392	3	383	383.1	3342	356	1314	355	2621	397	401.4	2545	304	305.3	2303
DSJC500.1	12	16	0	14		3084	15	0	14	3	13	13.6	1945	12		77
DSJC500.5	47	70	0	64		412	61	2	58	22	58	58.9	2372	49		476
DSJC500.9	126	175	0	159		2917	151	4	148	356	148	149.8	1197	126	126.5	2328
DSJC1000.1	20	28	0	26		1	24	3	23	1161	24		569	21		0
DSJC1000.5	82	123	0	116		200	108	19	105	2062	110	112	1414	88	88.1	1321
DSJC1000.9	222	316	0	303		1579	280	39	273	2188	291	294.9	2821	224	225.1	3181
DSJR500.1c	85*	97	0	89		48	90	0	87	148	118	123.5	0	106	113.9	0
DSJR500.1	12*	12	0	12*		0	12	0	12*	0	12	12.2	309	12		0
GEOM120	11*	11	0	11*		0	11	0	11*	0	11		211	11		0
latin_square_10	97	151	0	126		96	122	19	122	17	122	124.9	1758	100	101.2	1976
le450_15c	15*	26	0	22		3272	23	0	22	0	19	19.9	3136	15	15.9	1
le450_15d	15*	25	0	23		33	23	0	22	5	20	20.5	2266	16	16.1	48
le450_25c	25*	30	0	27		597	28	0	27	7	26		636	26		0
le450_25d	25*	30	0	27		201	28	0	27	4	26		958	26		0
r1000.1c	98	124	0	108		1624	106	10	103	2514	139	171.3	17	134	155.4	86
r1000.5	234	278	0	246		3080	251	16	247	1674	239	240.4	2276	244	246	3404
wap01a	41*	54	0	44		3230	47	6	44	567	44	45	2839	42	43.2	1306
wap02a	40*	48	0	44		6	44	5	43	40	44	44.2	1869	41	41.2	362
wap03a	43	55	0	51		611	51	41	49	194	54	54.5	1577	44	46.2	1125
wap04a	41	49	0	46		119	47	40	45	187	48	48.8	1608	42	43.3	2997
wap06a	40*	45	0	42		529	42	1	42	1	41		880	40	41.5	3318
wap07a	41	48	0	44		203	46	7	44	144	43	43.4	2148	42	42.6	523
wap08a	40*	49	0	43		1515	46	7	44	169	42	42.8	1410	41	41.8	1846
#BKS		148				189		171		190		202			213	
#Best		148				189		171		191		206			235	
#Best Avg		148				189		171		192		159			229	
#Optimal		0				109		0		110		0			0	

MCTS + Glouton - Résultats WVCP

1 point/instance si moyenne significativement meilleure pour la méthode en ligne comparé à celle en colonne (Wilcoxon signed-rank test, p-value < 0.001)

/188 instances	MCTS+R	MCTS+C	MCTS+D	MCTS+DSatur	MCTS+RLF	AFISA	RedLS	ILS-TS		#BKS	#Best	#Best Avg	#Optimal
MCTS+R	-	0	1	1	32	22	46	0		75	75	56	48
MCTS+C	122	-	23	32	92	77	85	0		114	114	75	49
MCTS+D	121	44	-	30	97	98	103	1		92	92	91	48
MCTS+DSatur	121	48	35	-	99	93	107	0		93	93	93	47
MCTS+RLF	87	14	14	14	-	58	79	0		70	70	70	45
AFISA	96	33	46	50	89	-	53	0		114	114	45	0
RedLS	79	51	60	57	88	41	-	14		112	131	47	0
ILS-TS	126	101	94	95	118	104	96	-		159	170	171	0

AFISA : Sun *et al.* [2018] - RedLS : Wang *et al.* [2020] - ILS-TS : Nogueira *et al.* [2021]

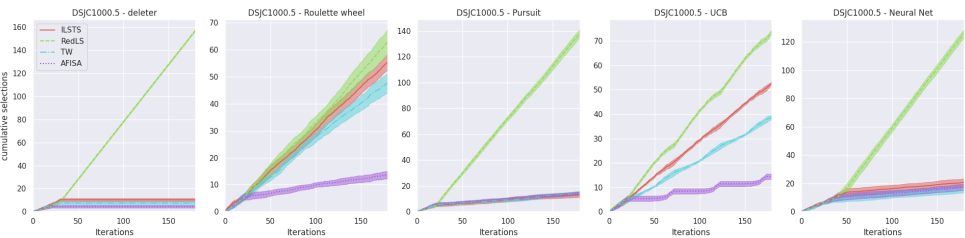
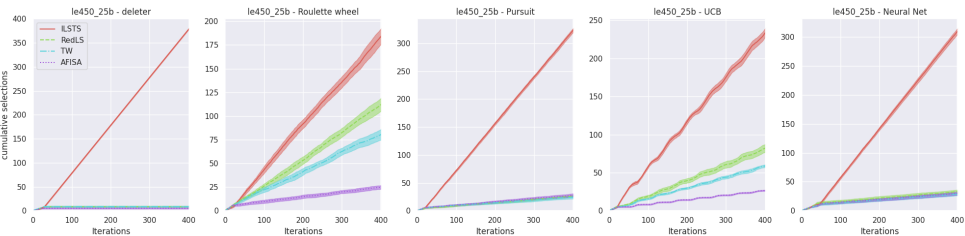
MCTS + Glouton - Résultats WVCP

instance	BKS	MCTS+GR			MCTS+G			MCTS+DSatur			AFISA			RedLS			ILS-TS		
		best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	2144	2505	2537.7	3422	2385		1685	2397	2398.8	3390	2384	2403.4	3601	2167	2193.8	2403	2237	2266.4	3498
C2000.9	5477	6233	6272.9	3575	6125	6147.8	3238	6275		163	6582	6650.1	0	5502	5528.1	3303	5910	5969.9	3587
DSJCI25.1g	23*	25	25.4	22	25		0	25		0	23	24.4	13	23	23.4	0	23		2
DSJCI25.5g	71	74	75.3	52	77		0	74		67	71	72.2	1360	72		257	71		126
DSJCI25.9g	169*	170	172.7	25	171		1630	171		21	170	174.1	2	169		0	169		182
DSJJC250.1	127	134	141.4	13	141		4	139		1151	129	133.6	3294	130	131.6	1	127	127.8	1608
DSJJC250.5	392	422	429.4	14	427		92	421		705	411	424.2	541	398	401.2	103	393	397.6	2567
DSJJC250.9	934*	973	988.7	2793	986		16	984		559	949	976.1	232	934	935.6	718	936	942.1	3053
DSJJC500.1	184	203	208.3	148	203		638	203		2943	198	201.5	1817	187	201.9	537	188	188.8	1744
DSJJC500.5	685	754	765.6	136	755		635	775	780.9	3542	762	778.1	1307	706	716.1	2840	724	735.5	1744
DSJJC500.9	1662	1771	1787.4	113	1794		171	1795	1797.1	3453	1744	1775.5	652	1670	1675.1	945	1720	1742	3039
DSJCI1000.1	300	334	337.4	1618	333		2823	340		2474	319	325	2182	305	307.2	1235	305	307.4	1574
DSJCI1000.5	1185	1271	1293.6	1668	1318		1437	1338		203	1308	1330	3531	1198	1213.7	2381	1245	1269.2	231
DSJCI1000.9	2836	3040	3070.4	978	3078		2863	3172		3338	3066	3107	3601	2840	2858.5	2953	3026	3066.8	3580
DSJR500.1	169*	169		46	177		0	176		21	169		54	171	184.5	0	169		0
flat1000_50_0	924	1236	1255.8	1452	1251	1251.1	3037	1303		1843	1267	1293.3	2736	1155	1173.8	3238	1222	1235	1712
flat1000_60_0	1162	1275	1295.8	1478	1260	1260.7	3424	1343		311	1309	1323.2	3584	1191	1205.7	1080	1250	1270	125
flat1000_76_0	1165	1252	1269.7	1477	1244	1248.2	3557	1313		1798	1288	1304.4	3278	1176	1194	1107	1232	1247.5	1198
GEOM120a	105*	106	106.6	330	105		1129	109		5	105	106.6	136	105	109.2	9	105		0
GEOM120b	35*	37		0	37		498	37		110	35	36.2	422	35	35.5	0	35		0
GEOM120	72*	72	73	0	72		0	72		36	72	73	0	72	75.2	0	72		0
latin_square_10	1480	1721	1757.1	966	1726	1726.8	3418	1805		2360	1607	1652.4	2257	1505	1523	2369	1559	1581.2	1368
le450_25a	306	307	310	3364	312		5	310		1919	311	316.3	2699	306	307.4	503	306		174
le450_25b	307*	309	309.1	993	309		0	309		224	308	312.6	1891	307	313.4	56	307		10
le450_25c	342	365	372.7	2844	369		950	376		1572	355	364.4	3436	351	354.8	43	348	351.8	3207
le450_25d	330	354	358.8	2802	364		1657	369		1411	351	357.8	1630	332	338.9	154	339	342.5	1999
queen10_10	162	165	169.1	986	171		0	169		8	165	166.9	524	162	166.2	504	162		13
queen11_11	172	178	180.4	941	180		80	179		50	179	181.1	722	174	177.1	761	172	172.6	1820
wap01a	545	657	659.8	2965	599		3272	595		2904	653	664.5	3413	563	688.4	252	548	552	3263
wap02a	538	645	648.7	1301	588		3265	590		262	658	666.2	3416	552	586.5	589	540	542.7	2658
wap03a	562	746	749	803	653		1096	647		1805	767	788	0	569	573.1	2893	576	578.6	3102
wap04a	563	755	757.8	3085	649		603	643		828	773	792.9	0	564	572.5	3280	569	574.6	3529
wap05a	541	583	591.1	1867	566		172	565		2882	563	572.5	3378	543	544.5	970	541	543.4	3306
p32	2480*	2480*		0	2480*		0	2480*		0	2480		0	2480	2480.5	0	2480		0
p42	2466*	2466	2466.8	33	2466		0	2466		4	2466	2474.8	1180	2466	2522.5	0	2466		4
r29	8693*	8693	8695.5	1316	8694		0	8694		3	8715	8799	379	8696	8817.6	0	8693		1
r30	9816*	9816	9819.6	11	9818		0	9818		0	9826	9960	2378	9836	9988.2	1	9816		5
#BKS		114			92			93			114			112			159		
#Best		114			92			93			114			131			170		
#Best Avg		75			91			93			45			47			171		
#Optimal		49			48			47			0			0			0		

MCTS+Hyperheuristiques - Résultats WVCP

Instance	BKS	RuLS			MCTS+RuLS			ILS-TS			Random			Dekster			Roulette			UCB			Pursuit			NN		
		best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time	best	avg	time
C2000.5	2144	2167	2193.8	2403	2354	2369	2091	2237	2206.4	3498	2336	2347.1	2870	2331	2342.2	2952	2330	2347.3	1845	2335	2349.8	1558	2332	2340.8	1271	2337	2346.2	6924
C2001.9	5477	5502	5528.1	3303	6060	6093.6	1107	5910	5909.9	3567	6035	6110.6	1968	6067	6105.4	4922	6073	6109.4	2542	6077	6111.4	2952	6069	6103.4	205	6100	6128.5	7363
DSJC250.1	127	130	131.6	1	127	127.5	1785	127	127.8	1609	127	128.1	1604	127	127.7	2271	127	127.8	2593	127	127.6	2135	127	127.8	1712	127	127.6	2094
DSJC250.5	322	398	401.2	103	396	397.9	3045	393	397.6	2567	397	399.1	1242	393	397.5	3558	397	398.6	1742	396	398.4	1746	396	397.8	1143	366	398.2	2701
DSJC250.9	934*	934	935.6	719	935	935.9	2406	936	942.1	3053	936	938.6	1593	935	936	2643	935	936.2	1802	935	936.1	1856	935	936.2	3054	934	935.6	2451
DSJC500.1	184	187	201.9	537	187	187.8	1765	188	188.8	1744	186	188.4	2079	185	188.2	3773	187	188.4	2503	187	188.4	3861	187	188.5	2079	187	188.2	3043
DSJC500.5	685	706	716.1	2840	716	719.2	3234	724	735.5	1744	715	720.2	964	715	719	3234	715	720.7	1045	712	720.6	880	715	719.8	717	713	718.9	631
DSJC500.9	1662	1670	1675.1	946	1687	1694.7	726	1720	1742	3039	1694	1697.5	2229	1685	1692.9	847	1689	1694.5	2622	1691	1695.4	1881	1690	1694.3	1227	1688	1693.5	3134
DSJC1000.1	300	305	307.2	1235	307	307.9	1799	305	307.4	1575	304	306.2	3570	304	305.8	1190	302	305.6	588	304	305.9	2835	305	305.4	2151	303	305.1	4617
DSJC1000.5	1185	1198	1213.7	2381	1244	1248.8	1957	1245	1269.9	231	1245	1251.4	756	1238	1246.6	1428	1241	1251.1	2142	1242	1250	1722	1239	1247.8	1554	1240	1247.6	3159
DSJC1000.9	2836	2840	2858.5	2953	2974	2992.2	651	3026	3066.8	3580	2982	2995.9	1890	2983	2992.5	3486	2984	2995.2	2982	2983	2995.1	504	2983	2995.2	2058	2976	2993.2	1499
DSJRS00.1	169*	171	184.5	0	169	169	318	169	169	0	169	169	14	169	169	19	169	169	15	169	169	20	169	169	20	169	169	16
flatt1000_50_0	924	1155	1173.8	3238	1199	1206.2	336	1222	1235	1713	1203	1210.7	3045	1191	1202.2	630	1201	1208.1	945	1205	1210.6	756	1198	1207.8	3654	1196	1204.6	4370
flatt1000_60_0	1162	1191	1205.7	1080	1238	1244.5	1491	1250	1270	125	1235	1245.5	3045	1242	1247.5	525	1241	1248.2	1995	1232	1245.3	882	1239	1245.3	1701	1238	1245.1	1393
flatt1000_76_0	1165	1306	1194	1107	1214	1222	1176	1232	1247.5	1198	1210	1224.9	2751	1217	1222.1	1470	1211	1223.8	168	1218	1226.2	504	1214	1223	2121	1211	1222.5	4602
lacta_square_10	1480	1505	1523	2369	1533	1544.8	1938	1559	1581.2	1369	1546	1552.9	1406	1533	1542.2	1606	1540	1550.6	3286	1522	1546.8	456	1529	1547.2	798	1538	1546.2	4558
lw450_15a	212	214	236.3	218	212	213.7	684	213	214.7	2429	213	214.5	2544	213	215.5	3141	213	214.2	1022	213	214.2	873	213	213.8	1866	214	214.2	1530
lw450_15b	216	218	225.6	39	217	217.6	1115	216	217.8	2536	217	217.9	968	217	218.4	783	217	217.8	1319	217	217.7	1930	217	217.8	2504	217	217.8	2640
lw450_15c	275	281	285.8	34	279	280.8	1415	280	283.7	1606	278	281.6	1910	279	280.8	790	279	281.7	570	280	281.2	1066	279	281.7	2670	279	281.4	2630
lw450_15d	272	278	281	268	276	277.1	2153	277	279.9	1405	276	278.3	2590	276	277.9	1480	276	277.9	1620	277	278.2	1427	275	277.1	870	275	277.2	1146
lw450_25c	342	351	354.8	44	348	349.4	383	348	351.8	3247	349	350.2	945	347	347.4	2147	350	350.3	1053	348	349.8	2052	347	349.5	2889	347	349.4	3388
lw450_25d	330	332	338.9	154	334	335.9	1436	339	342.5	1999	336	338.6	1403	334	336.1	1935	335	336.7	1512	333	336	2394	333	335.9	1386	335	336	2054
queen10_10	162	162	166.2	505	162	162	148	162	162	52	162	162	52	162	162	32	162	162	37	162	162	37	162	162	37	162	162	34
queen11_11	172	174	177.1	762	172	173.2	1935	172	172.6	1821	172	172.9	2011	172	172.8	1952	172	172.8	1960	172	172.8	1293	172	172.8	1370	172	172.7	2632
queen12_12	185	188	190.2	8	185	186.6	432	185	186.1	1261	186	186.7	1379	186	186.5	1506	186	186.5	1723	186	186.6	2051	186	186.4	1502	186	186.4	1369
queen13_13	194	195	198.7	1528	194	194.6	1605	194	195.7	3476	194	194.9	2997	194	194.5	1668	194	194.8	2707	194	194.5	2734	194	194.6	1352	194	194.3	2140
R75_1gb	70*	70	78.3	0	70	70	7	70	70	7	70	70	5	70	70	4	70	70	4	70	70	3	70	70	3	70	70	4
R75_1g	18*	18	19.1	0	18	18	1	18	18	1	18	18	3	18	18	5	18	18	3	18	18	5	18	18	5	18	18	5
R75_5g	186*	186	186.9	0	186	186	9	186	186	9	186	186	7	186	186	7	186	186	7	186	186	6	186	186	6	186	186	6
R75_5g	51*	51	51.3	109	51	51	6	51	51	1	51	51	1	51	51	2	51	51	2	51	51	1	51	51	1	51	51	1
R75_9gb	396*	396	396	0	396	396	10	396	396	10	396	396	6	396	396	6	396	396	6	396	396	5	396	396	6	396	396	6
R75_9g	110*	110	110	0	110	110	0	110	110	0	110	110	1	110	110	1	110	110	1	110	110	0	110	110	1	110	110	1
R100_1gb	81*	82	84.5	0	81	81	59	81	81	2	81	81	13	81	81	10	81	81	10	81	81	10	81	81	12	81	81	11
R100_1g	21*	21	22.1	0	21	21	53	21	21	8	21	21	19	21	21	19	21	21	24	21	21	21	21	21	25	21	21	21
R100_5g	220	220	220.7	87	220	220	33	220	220	6	220	220	19	220	220	19	220	220	19	220	220	19	220	220	19	220	220	17
R100_5g	59	59	59	17	59	59	6	59	59	9	59	59	5	59	59	5	59	59	5	59	59	5	59	59	4	59	59	4
R100_9gb	518*	518	518	0	518	518	1	518	518.8	1853	518	518	13	518	518	13	518	518	15	518	518	10	518	518	9	518	518	10
R100_9g	141	141	141	0	141	141	141	141	141	141	141	141	8	141	141	11	141	141	12	141	141	13	141	141	13	141	141	13
wsp01a	545	563	688.4	252																								

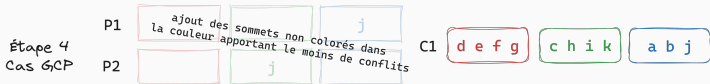
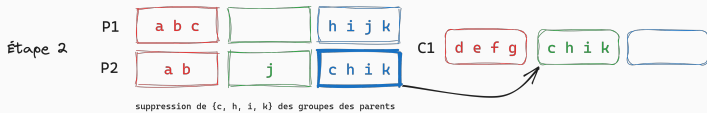
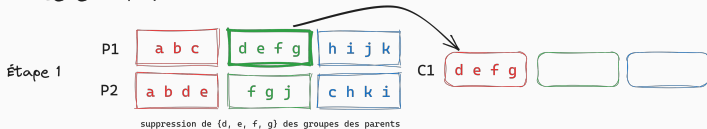
MCTS + Hyperheuristiques - Sélection



AHEAD

AHEAD - GPX

Croisement GPX



AHEAD - Resultats GCP

instance	BKS	PartialCol			TabuCol			HEAD+TC			AHEAD+Random			AHEAD+Deleter		
		best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	145	164	165.2	5313	162	162.8	4628	148	149.2	3330	150	150.7	3101	149	150.7	3152
C2000.9	408	420	420.8	5171	411	412.5	4786	405	406.4	2328	405	407.7	2956	404	405.6	2988
C4000.5	259	304	305.6	6690	303	304.2	5567	278	279.6	3580	280	281.6	3651	279	280.8	3404
DSJC500.1	12	12		128	12		75	12		86	12		80	12		56
DSJC500.5	47	50	50.1	2227	49		460	48		819	48		1258	48		850
DSJC500.9	126	128		975	126	126.3	2988	126		1027	126	126.1	1379	126		632
DSJC1000.1	20	21		1	21		0	21		0	21		1	20	20.9	2391
DSJC1000.5	82	90	90.5	3516	88		1760	83	83.3	2290	83	83.5	2372	83	83.5	2511
DSJC1000.9	222	227	228.4	3630	224	224.9	3345	223	224	1616	223	224.2	2734	223	223.8	1589
DSJR500.5	122*	125	126.2	1666	124	127	1155	123	124	1766	123	124.2	2245	123	123.8	2289
flat300_28_0	28*	28		896	28	29.5	3220	30	30.8	1916	28	28.5	702	28	30.4	5
flat1000_50_0	50*	50		44	50		69	50		28	50		8	50		8
flat1000_60_0	60*	60		213	60		233	60		54	60		28	60		29
flat1000_76_0	76*	89	89.1	2845	86	87	3096	82	82.3	1905	82	82.8	2775	82	82.8	1969
latin_square_10	97	107	110.2	4875	100	100.8	4377	102	103.7	93	103	103.8	1996	99	100.7	1729
le450_25c	25*	27		69	26		0	26		0	25	25.9	1407	25	25.3	1022
le450_25d	25*	27		50	26		0	26		0	25		0	25	25.3	1537
r250.5	65*	67		134	66	67.2	462	65	66	3378	65	66	1638	66		549
r1000.1c	98	141	149.1	61	134	155.2	77	100	101.6	264	100	101.6	1674	100	101.6	1621
r1000.5	234	247	248.1	5638	244	245.6	3622	246	247.6	1479	246	247.4	2134	245	245.5	2009
wap01a	41*	42		1088	42	43	2160	42		137	42		143	41	42	1958
wap02a	40*	41	41.7	4275	40	41.1	6499	41		15	41		15	40	40.8	1634
wap03a	43	44		91	44	45.9	4342	45		261	45		87	43	44.3	2387
wap04a	41	43		61	42	43.1	4869	43		880	43		1186	43		293
wap06a	40*	41		98	40	41.3	4248	40		909	40	40.8	1549	40		246
wap07a	41	44		41	41	42.3	5046	42	42.1	1771	42	43	2526	42	42.1	494
wap08a	40*	43	43.2	2750	41	41.5	2967	42		48	42		365	41	41.9	2146
#BKS		5/31			8/31			7/31			9/31			13/31		
#Best		8/31			14/31			17/31			17/31			24/31		
#Best Avg		11/31			7/31			15/31			9/31			20/31		

AHEAD - Resultats WVCP

instance	BKS	RedLS			ILS-TS			HEAD+RedLS			AHEAD+Random			AHEAD+Deleter		
		best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time	best	mean	time
C2000.5	2144	2131	2155.7	18367	2244	2264.4	6423	2244	2257.9	7453	2220	2236.8	12962	2218	2236.3	1782
C2000.9	5477	5439	5455.1	23137	5847	5910.1	23014	5732	5748.2	12980	5732	5783.9	12491	5717	5758.8	12327
DSJC1000.1	300	303	306.9	5839	305	306.2	5819	304	305.6	7380	302	303.8	9348	300	302.2	12874
DSJC1000.5	1185	1190	1206.9	12204	1241	1267.7	21935	1225	1229.7	7011	1222	1228.2	5371	1224	1230.5	1476
DSJC1000.9	2836	2828	2841.8	22796	3004	3035.9	25345	2909	2926.5	820	2911	2928.7	12633	2907	2926.8	2379
DSJC500.1	184	187	194	702	185	187.3	7107	186	186.9	6594	185	186.5	10290	184	185.9	8022
DSJC500.5	685	707	712.5	27147	711	721.2	9150	709	712.6	2534	706	711.5	12516	709	713.5	5838
DSJC500.9	1662	1667	1671	9925	1709	1725.3	24351	1680	1683.5	4053	1678	1684.2	12644	1676	1682.8	8149
DSJC250.1	127	129	131.4	56	127	127.1	11901	127		4516	127		3729	127	127.2	3235
DSJC250.5	392	399	400.8	2602	392	393.9	10722	395	396.2	8349	393	395.2	9592	392	396.6	6028
DSJC250.9	934*	934	935	9679	934	935.1	14740	934	935.1	6741	934	934.2	8097	934	935	5011
flat1000_50_0	924	1152	1165.7	6259	1213	1230.5	570	1181	1187.7	7544	1179	1186.3	4428	1180	1186.8	2952
flat1000_60_0	1162	1196	1204.8	1877	1247	1263.8	25765	1216	1227.2	10824	1213	1223.7	11726	1217	1224.5	9840
flat1000_76_0	1165	1163	1183.2	28084	1228	1242.2	16513	1192	1204	2214	1187	1203	10742	1196	1204	8938
latin_square_10	1480	1505	1515.3	14189	1555	1575	18924	1523	1532.5	11286	1510	1526.2	13987	1517	1527.8	8732
le450_15a	212	213	215.4	54	211	213.6	11684	212	212.8	6777	212	212.8	8819	211	212.4	10557
le450_15b	216	218	219.9	41	217	217.1	10346	216	217	3204	216	217.1	2736	215	216.5	11124
le450_15c	275	282	285.4	82	279	281.7	16288	277	279.4	8360	277	278.8	7220	278	279.4	4788
le450_15d	272	277	280.6	325	275	277.6	8456	274	276.1	6004	274	275.6	8759	273	275.2	13299
le450_25a	306	306	306.6	2881	306		142	306		161	306		169	306		131
le450_25b	307*	307	307.6	95	307		23	307		53	307		28	307		19
le450_25c	342	348	352.8	583	348	349.1	16413	347	348.1	180	346	347.8	5652	346	348	588
le450_25d	330	335	339.4	232	337	338.7	14212	333	334.4	5904	333	334.2	6282	333	334.2	9648
wap01a	545	557	577	995	547	550.1	20531	552	559.1	8178	549	553.6	14094	549	552.8	8874
wap02a	538	554	572.1	16183	536	541	21912	550	557.1	13884	541	546.1	7654	541	545.5	12994
wap03a	562	569	575.5	17878	572	575.5	22637	577	579.7	6992	573	576.3	8096	573	575.9	2944
wap04a	563	567	578.9	13939	567	570.5	7346	573	575.6	3152	570	573.2	1970	569	572.5	13790
wap05a	541	542	543.8	7719	542	542.2	11809	542	542.9	4471	542	543	12056	542	543.2	2772
wap06a	516	519	526.1	1575	516	519.5	6264	519	520.7	12180	518	521	9100	520	521.2	5978
wap07a	555	554	573	8460	565	569.2	16299	557	559.4	3360	558	559.8	12040	557	559.2	12460
wap08a	529	536	543.7	19557	543	546.9	19271	539	540.8	7452	539	541.2	1800	538	540.1	10608
#BKS			15/48			23/48			19/48			21/48			24/48	
#Best			24/48			25/48			19/48			22/48			28/48	
#Best Avg			11/48			21/48			11/48			19/48			19/48	

AHEAD GCP - Sélections

